Durée : 4 heures

• On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues 2π-*périodiques* à valeurs complexes. Si f appartient à $\mathcal{C}$, on note

$$\|f\| = \sup_{|t| \leqslant \pi} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$$

et, si $0 < \alpha < \pi$, on pose

$$I_\alpha = [-\alpha, \alpha] \quad \text{et} \quad \|f\|_{I_\alpha} = \sup_{t \in I_\alpha} |f(t)|.$$

Un sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$ est dit *associé* à α appartenant à $]0, \pi[$, s'il existe un réel positif M (dépendant de $\mathcal{E}$ et α) tel que

$$\forall f \in \mathcal{E} \quad \|f\| \leqslant M\,\|f\|_{I_\alpha}.$$

• Si f est un élément de $\mathcal{C}$, on note $\hat{f}$ la fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,dt$$

et on pose

$$\sigma(f) = \{n \in \mathbb{Z};\ \hat{f}(n) \neq 0\}.$$

On pose

$$\mathcal{R} = \{f \in \mathcal{C};\ \sigma(f) \text{ est fini}\}$$

et, pour toute partie A de $\mathbb{Z}$,

$$\mathcal{C}_A = \{f \in \mathcal{C};\ \sigma(f) \subset A\} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_A = \mathcal{C}_A \cap \mathcal{R}.$$

• Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}$ on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\,dt.$$

• Pour tout k de $\mathbb{Z}$, on désigne par e_k la fonction

$$e_k(t) = e^{ikt}.$$

• On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

1° Montrer que, pour f et g dans $\mathcal{C}$,

$$f * g \in \mathcal{C}, \quad f * g = g * f, \quad \widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}.$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad f * e_k = \hat{f}(k)\, e_k.$$

2° On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad K_n(t) = C_n(1 + \cos t)^n$$

où C_n est une constante réelle positive choisie de sorte que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1.$$

Montrer que

$$\forall \delta \in]0, \pi[\quad \lim_{n \to \infty} \left[\sup_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} K_n(t)\right] = 0$$

$\left(\text{on cherchera à minorer } \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t)^n\,dt\right)$.

3° Montrer que K_n appartient à $\mathcal{R}$ et que, pour tout f de $\mathcal{C}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f * K_n \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \|f * K_n - f\| = 0.$$

4° Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \forall g \in \mathcal{C} \quad f = g \Leftrightarrow \hat{f} = \hat{g}.$$

En déduire, en particulier, une caractérisation de $\mathcal{R}$.

5° Montrer que

$$\forall A \subset \mathbb{Z} \quad \mathcal{C}_A = \overline{\mathcal{R}}_A$$

(où l'adhérence est relative à la norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{C}$).

Tournez la page S. V. P.

6° Montrer que, si f appartient à $\mathcal{C}$ et P appartient à $\mathcal{L}$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{Z} \qquad \widehat{fP}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\lambda - n)\,\hat{P}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\,\hat{P}(\lambda - n)$$

où les sommes sont, en fait, des sommes finies.

(On regardera d'abord le cas $P = e_k$).

Dans toute la suite du problème on désigne par Λ une partie de $\mathbb{Z}$ de la forme

$$\Lambda = \{\lambda_k ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \lambda_k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geqslant 3.$$

II

1° Montrer que, si m appartient à $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout k de $\mathbb{N}^*$ inférieur ou égal à m, ε_k est un élément de $\mathbb{Z}$ avec $|\varepsilon_k| \leqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall k \qquad \varepsilon_k = 0$$

(on montrera d'abord $\varepsilon_m = 0$).

En déduire que, si m appartient à $\mathbb{N}^*$, un élément n de $\mathbb{Z}$ s'écrit au plus d'une façon sous la forme

$$n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \lambda_k$$

avec, pour tout k, ε_k dans $\{-1, 0, +1\}$.

On fixe, dans toute la suite de cette partie,

$$m \in \mathbb{N}^*,\ \delta \in]0, 1[,\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathbb{R}^m,\ \varepsilon \in]0, \pi[$$

et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad S(t) = \frac{2}{\delta} \prod_{k=1}^{m} [1 + \delta \cos(\lambda_k t + \varphi_k)].$$

On désigne par a l'unique élément de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \ a(t) = a(-t), \quad \forall t \in [0, \varepsilon]\ a(t) = \frac{2\pi}{\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} t\right),$$

$$\forall t \in [\varepsilon, \pi]\ a(t) = 0.$$

2° *a.* Montrer que S appartient à $\mathcal{L}$ et calculer $\hat{S}(n)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

(On distinguera suivant que n est de la forme $\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \lambda_k$ avec les ε_k dans $\{-1, 0, +1\}$ ou que n n'est pas de cette forme. Dans le premier cas, on exprimera $\hat{S}(n)$ en fonction des ε_k).

b. Montrer que

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant m \qquad \hat{S}(\lambda_k) = e^{i\varphi_k} \quad \hat{S}(-\lambda_k) = e^{-i\varphi_k}$$

et

$$|\hat{S}(n)| \leqslant \frac{\delta}{2} \quad \text{si} \quad n \notin \{\pm \lambda_k ;\ 1 \leqslant k \leqslant m\} \cup \{0\}.$$

c. Montrer que

$$\|S\|_1 = \frac{2}{\delta}.$$

3° *a.* Calculer $\hat{a}(n)$ pour *tout* n de $\mathbb{Z}$.

b. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{a}(n) = \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

c. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{|n| > N} \hat{a}(n) \leqslant \frac{8}{\varepsilon^2 N}.$$

Tournez la page S. V. P.

page 52 1986 E.n.s.e.t. Section A1 Math 1

4° On pose $T = a\,S$. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \ \forall k \geqslant N+1 \quad |\widehat{S}(\lambda_k) - \widehat{T}(\lambda_k)| \leqslant \frac{\delta\pi}{\varepsilon} + \frac{16}{\varepsilon^2 N \delta}$$

(On pourra d'abord prouver que, pour tout N dans $\mathbb{N}^*$,

$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad k \geqslant N+1$ et $0 < |n| \leqslant N \Rightarrow \lambda_k - n > 0$ et $\lambda_k - n \notin \Lambda$).

III

On fixe, dans cette partie, ε appartenant à $]0, \pi[$.

1° Montrer qu'il existe un élément l de $\mathbb{N}^*$ et un réel M tels que, pour tout entier $m \geqslant l$ et pour tout φ de $\mathbb{R}^m$, il existe un élément T de $\mathcal{C}$ ayant les propriétés suivantes :

i. La restriction de T à $[-\pi, \pi]$ est nulle hors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$

ii. $\forall l \leqslant k \leqslant m \quad |\widehat{T}(\lambda_k) - e^{i\varphi_k}| \leqslant \frac{1}{2}$

iii. $\|T\|_1 \leqslant M$.

2° Soit $m \geqslant l$. On considère un élément P de $\mathfrak{L}$ de la forme :

$$P = \sum_{k=l}^{m} \zeta_k\, e^{-i\varphi_k}\, e_{\lambda_k}$$

avec $\forall l \leqslant k \leqslant m \quad \zeta_k \geqslant 0$ et $\varphi_k \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\sum_{k=l}^{m} \zeta_k \leqslant M \|P\|_{I_\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{k=l}^{m} \zeta_k$$

(on pourra considérer $P * T(0)$).

3° On pose :

$$\Lambda' = \{\lambda_k ; k \geqslant l\}.$$

Montrer que $\mathcal{C}_{\Lambda'}$ est associé à ε.

IV

1° Soit $\varepsilon, \eta > 0$ avec $\varepsilon + \eta < \pi$. On considère une partie A de $\mathbb{Z}$ telle que $\mathcal{C}_A$ soit associé à ε.

a. On suppose qu'il existe un élément g de $\mathcal{C}_A$ et un élément q de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\forall t \in I_{\varepsilon+\eta} \quad g(t) = e_q(t).$$

On pose, pour $|h| \leqslant \eta$,

$$g_h(t) = g(t+h) - e^{iqh}\, g(t).$$

Montrer que g_h appartient à $\mathcal{C}_A$, puis que g_h est identiquement nulle.
En considérant $\widehat{g_h}$, en déduire que q appartient à A.

b. On considère maintenant un entier q n'appartenant pas à A.
Montrer qu'il existe un réel L (dépendant de ε, η, q) tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}_A \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad |z| \leqslant L \|f + z\, e_q\|_{I_{\varepsilon+\eta}}$$

(on pourra raisonner par l'absurde).
En déduire que $\mathcal{C}_{A \cup \{q\}}$ est associé à $\varepsilon + \eta$.

2° Montrer que, pour tout ε dans $]0, \pi[$, $\mathcal{C}_\Lambda$ est associé à ε.